Αναλυτική Γεωμετρία 16/2/2016

Μαθημα 1ο

Χρυσακης - αναλυτική γεωμετρια - αλγεβρα (βιβλιο)

Ευκλειδης (4ος π.Χ)

Στοιχεια (13 βιβλια ~325 π.Χ)

α) συγκεντρωση υλης της γνωσης

β) "ταξινομηση" αυτης (αξιωματική θεμελιωση)

Αξιωματα Ευκλειδη

1) Απο καθε σημειο και προς αλλο σημειο αγεται μια ευθεια

2) Καθε ευθεια προεκτεινεται επ' απειρο

3) Απο τυχον σημειο και τυχουσα ακτινα γραφεται κυκλος

4) Ολες οι ορθές γωνιες είναι ισες μεταξυ τους

5) Απο σημειο A και ευθεια (ε) αγεται το πολυ μια ευθεια (ε') : (ε')//(ε)

Για το (5) αν αντι το "πολυ" βαλω "μοναδική" τοτε εχω Ευκλειδια γεωμ. 180°

— " — "καμια" — " — Σφαιρική γεωμ. $>180^\circ$

— " — "απειρες" — " — Υπερβολικη γεωμ. $<180^\circ$

Αξιωματα Hilbert { Προϋποθετουν την υπαρξη ενος συνολου με στοιχεια τα σημεια και υποσυνολα τις ευθειες. }

Αξιωματα θεσης

Θ1) Για δυο οποιαδηποτε διαφορετικά σημεια A, B υπαρχει μοναδική ευθεια που τα περιεχει

Θ2) Μια τυχαια ευθεια περιεχει δυο τουλαχιστον σημεια

Θ3) Υπαρχουν τουλαχιστον τρια μη συνευθειακα σημεια

Προταση

Δυο διαφορετικές ευθείες έχουν το πολυ ενα κοινό σημειο

Αποδειξη

Εστω $ε_1 \neq ε_2$ ευθειες και εστω οτι εχουν ≥ 2 κοινό σημεια

Ατοπο στο Θ1

σημεια ≤ 1 σημαινει
το πολυ ενα!

Μοντελο "ικανοποιησης" των Θ1, Θ2, Θ3

Εστω το συνολο $\{Α, Β, Γ\}$ σημεια Α, Β, Γ

ευθειες $\{Α, Β\}$

$\{Β, Γ\}$

$\{Α, Γ\}$

Θ1, Θ2, Θ3 επαληθεύονται και επαληθευεται επισης και το Π
$\shortparallel$
Αξιωμα Παραλληλιας

Θ4) Για καθε τρια μη συνευθειακα σημεια υπαρχει μοναδικο επιπεδο που τα περιεχει. Καθε επιπεδο περιεχει τουλαχιστον ενα σημειο

Θ5) Αν Α, Β διαφορετικα σημεια που ανηκουν στο ιδιο επιπεδο $\Rightarrow$ και η ευθεια που τα περιεχει βρισκεται στο ιδιο επιπεδο

Θ6) Αν δυο επιπεδα έχουν κοινο σημειο $\Rightarrow$ θα έχουν τουλαχιστον ενα ακομη

Θ7) Υπαρχουν τουλαχιστον 4 σημεια που δεν ανηκουν στο ιδιο επιπεδο.

Αξιωματική Θεμελίωση

Το σύνολο αξιωμάτων οφείλει:

(i) Να είναι συμβιβαστό {κάθε πρόταση είτε ισχύει είτε όχι}

(ii) Να είναι ανεξάρτητο {δεν υπάρχει αξίωμα που να έπεται από τα άλλα}

(iii) Να είναι πλήρες {μπορούμε να αποδείξουμε τα πάντα}

Πρόταση

Τα Θ1, Θ2, Θ3, Π είναι ανεξάρτητα

Για να δείξουμε ότι είναι ανεξάρτητα, αρκεί να προσδιορίζουμε μοντέλο που πληρούν τα 3 από τα 4.

π.χ

Θ1, Θ2, Π : ✓

Θ3 : ✗

Σημεία {A,B} Άρα Θ3 ανεξάρτητο από τα Θ1, Θ2, Π

Ευθεία {A,B}

⊛ Έστω $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$: σημεία $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ όπου $x, y \in \mathbb{R}$

ευθείες $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ όπου $(\alpha,\beta) \neq (0,0)\}$

Έλεγχος συμβιβαστότητας των Θ1, Θ2, Π, Θ3

(Θ2) Κάθε ευθεία περιέχει τουλάχιστον δύο σημεία

Έστω (ε): $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ και αφού $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$ χωρίς βλάβη της γενικότητας ($\alpha \beta \gamma$) μπορώ να υποθέσω $\beta \neq 0$

Αν $x = 0 \Rightarrow y = -\frac{\gamma}{\beta} \Rightarrow$ συνεπώς το σημείο $\left(0, -\frac{\gamma}{\beta}\right) \in (\varepsilon)$

Αν $\alpha \neq 0 \Rightarrow x = \alpha \Rightarrow y = \frac{-\gamma - \alpha^2}{\beta} \Rightarrow$ συνεπώς το σημείο $\left(\alpha, \frac{-\gamma-\alpha^2}{\beta}\right) \in (\varepsilon)$

Άρα αν $x=0$ και $a \neq 0$ οι δύο περιπτώσεις που πήραμε μας επαληθεύει το Θ2

$\rightarrow$ δηλ. για $x=1$

Αν $a=0$ $\Rightarrow$ π.χ το σημείο $\left(1, \frac{-\gamma}{\beta}\right) \in (\varepsilon)$

Άρα πάλι επαληθεύεται το Θ2

Θ3 Υπάρχουν τουλάχιστον τρία σημεία μη-συνευθειακά

Έστω $(\varepsilon): ax+\beta y+\gamma=0$, $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$

π.χ: Έστω $(0,1)$, $(1,0)$, $(0,0)$ $\in (\varepsilon)$

$$\left.\begin{array}{l} (0,1) \in (\varepsilon) \Rightarrow \beta+\gamma=0 \\ (0,0) \in (\varepsilon) \Rightarrow \gamma=0 \\ (1,0) \in (\varepsilon) \Rightarrow a+\gamma=0 \end{array}\right\} \Rightarrow a=\beta=\gamma=0$$

Άτοπο γιατί $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$

Οπότε το Θ3 ικανοποιείται

Θ1 Από δύο σημεία διαφορετικά διέρχεται μοναδική ευθεία

Έστω $P_1=(x_1,y_1) \neq (x_2,y_2)=P_2$ Θ.Δ.Ο $\rightarrow$ Ύπαρξη ευθείας που διέρχεται από τα P_1, P_2

$\rightarrow$ μοναδικότητα αυτής

Έστω (ε) $(y_1-y_2)x+(x_2-x_1)y+x_1y_2-y_1x_2=0$

Θα δούμε ότι $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ είναι εξίσωση ευθείας